Economía y Finanzas Matemáticas

Derivados: Swaps, contratos a plazo, futuros

Rafael Orive Illera
Departamento de Matemáticas
Universidad Autónoma de Madrid
rafael.orive@uam.es

Febrero 2018

Swaps

Swap: Es una acuerdo para el intercambio de flujos financieros en una serie de fechas futuras.

No se negocia en mercados regulados. Es un mercado de contratos a medida OTC (over the counter). Son seguidos por una organización profesional que agrupa a los principales actores, ISDA.

Modalidades de Swaps:
- De tipos de intereses: Tipo fijo / tipo variable
- Divisas (currency swaps) más tipos
- Tipo de interés (fijo o variable) /renta variable (equity swap)
- Constant maturity swaps (CMS)
- Constant maturity treasure (CMT)

Swap de tipo de interés, tiene el efecto de transformar los tipos de interés para mejorar las ofertas recibidas de tipos o reducir el riesgo de las operaciones. Tipo fijo / tipo variable (flotante)

Parámetros de los swaps de tipo de interés:
- nominal N
- fechas $t_1, \ldots t_n$
- tipo swap, R, tipo fijo
- tipo variable, LIBOR

Ejemplo: Hedge. Cubrir riesgo. Tengo un prestamo a 3 años de 100 m$ con un LIBOR 6 meses con diferencial 150 puntos básicos. Contrato un swap a 3 años de un tipo fijo del 4% para cubrir el flotante.

Fecha	Libor 6m	variable	fijo	neto
17/02/17	1,36			
17/08/17	1,94	1,43	-2,00	-0,67
17/02/18	2,78	1,72	-2,00	-0,28
17/08/18	3,12	2,14	-2,00	0,14
17/02/19	3,30	2,31	-2,00	0,31
17/08/19		102,40	-102,00	0,40

Valoración de un swap de tipo de interés

Depende en signo de a quien va dirigido. Consideremos el caso paga interés fijo y recibe el flotante:

$$
\begin{aligned}
V_{\mathsf{swap}} &= B_{\mathsf{fl}} - B_{\mathsf{fix}} \\
B_{\mathsf{fix}} &= \sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + N e^{-r_n t_n} \\
B_{\mathsf{fl}} &= (k^* + N) e^{-r_1 t_1}
\end{aligned}
$$

donde k es el pago de tipo fijo,

k^* es el pago de tipo flotante (ya conocido),

r_i, tipos de interés relevantes a los vencimientos t_i.

Los tipos r_i (LIBOR) deben reflejar lo arriesgado de los flujos de caja.

Un swap si se firma en la media de las cotizaciones de oferta y demanda tendrá valor 0, es decir, $B_{\mathsf{fl}} = B_{\mathsf{fix}}$, y:

$$\begin{aligned} B_{\mathsf{fix}} &= \sum_{i=1}^{n} k e^{-r_i t_i} + N e^{-r_n t_n}, \\ B_{\mathsf{fl}} &= (k^* + N) e^{-r_1 t_1} = N, \end{aligned}$$

Por tanto, siendo y_n el tipo TIR continuo asociado a la curva CC de tipos continuos $r_1, \ldots, r_n$,

$$k = N(e^{y_n t_1} - 1).$$

El tipo fijo del swap sería el TIR_n si lo consideramos como interés compuesto anual.

Al final de vida siempre es cero.

Swap de divisas, implica intercambios de pagos de principal e intereses de tipo fijo ó flotante sobre un prestamo en una divisa, por pagos de principal e intereses de tipo fijo ó flotante sobre otro prestamo en otra divisa.

Parámetros de los swaps de tipo de interés más sencillo:
- dos nominales N_1, N_2
- fechas $t_1, \ldots t_n$
- tipos swap, R_1 y R_2, para cada divisa (tipos fijos)

Valoración de un swap de divisas

Depende en signo de a quien va dirigido. Consideremos el caso paga interés fijo y recibe el flotante:

$$V_{\mathsf{swap}}(t) = B_1(t) - X_{1/2}(t)B_2(t)$$

donde B_1 es el valor del bono en la divisa 1,
B_2, es el valor del bono en la divisa 2,
$X_{1/2}$, es el valor del cambio de la divisa 1 con respecto a la 2.

El valor inicial de un swap de divisas no tiene porque ser 0.

Arbitraje

El arbitraje es la práctica de tomar ventaja de una diferencia de precio entre dos o más mercados.

Ejemplo: Mercado de deuda (cupones cero, TIR)

Ante una posibilidad de arbitraje se producen una combinación de transacciones complementarias que resulta el equilibrio del mercado.

Si los precios de mercado no permiten la ejecución de arbitraje rentable entonces los precios están en un equilibrio de arbitraje o que el mercado es libre de arbitraje

Contrato a plazos (forward)

Un contrato a plazo (forward) es un acuerdo privado para intercambiar un activo por dinero (o por otro activo) en una fecha futura especificada.

Ejemplos: un acuerdo sobre tipos a plazo (FRA)
contratos a plazo sobre divisas
contratos de compra de acciones

Los **actores** de un forward:
- Posición larga, quien compra el activo
- Posición corta, quien vende el activo

Características de un forward:

- No se negocian en mercados
- Se fija el precio del activo del contrato
- Es vinculante. Se liquida por entrega o diferencia
- Los flujos finales son funciones lineales del subyacente
- Uso en: coberturas, especulación,...

Los contratos a plazo se establecen de tal forma que su valor inicial sea cero: No cuesta nada tener una posición corta o larga.

El precio actual a plazo de un contrato es el precio de entrega que se aplicaría si el contrato se negociara hoy. El precio de entrega es el precio a plazo de cuando se firma.

Parámetros de un forward:

- T, tiempo de la firma del contrato hasta la finalización
- S_t el valor del subyacente en t, $0 \leq t \leq T$
- F_t el (precio a plazo) en t que vence en T
- $r = r(t, T)$ el tipo continuo libre de riesgo

Teorema. Supongamos precios en equilibrio de arbitraje. Entonces, el precio para la entrega en T (precio de entrega) de una unidad de subyacente es

$$F_0 = S_0 e^{rT}$$

Con dividendos conocidos. El subyacente paga dividendos, cuyo valor actual es D_0. Entonces, el precio del forward es

$$F_0 = (S_0 - D_0)e^{rT}$$

El subyacente genera un rendimiento anual medio q. Entonces, el precio es

$$F_0 = S_0 e^{(r-q)T}$$

Valoración dinámica de un contrato. Refleja la diferencia entre lo que se contrato y el valor de hacer el contrato en ese momento. Calcular el valor de un contrato f_t en el tiempo t, $0 < t < T$, para un contrato realizado en 0 y finaliza en T.
El valor inicial es 0, $f_0 = 0$.
El valor del contrato en t:

$$f_t = (F_t - F_0)e^{-r(T-t)} = (S_t e^{r(T-t)} - F_0)e^{-r(T-t)} = S_t - F_0 e^{-r(T-t)}$$

En el caso de dividendos o rendimientos conocidos, se tiene:

$$f_t = S_t - I_t - F_0 e^{-r(T-t)} \text{ o } f_t = S_t e^{-q(T-t)} - F_0 e^{-r(T-t)}$$

donde I_t es el valor actual de los ingresos o q es el rendimiento anual medio.

Valoración neutral de riesgo

Cualquier activo dependiente de otros activos puede valorarse sobre el supuesto de que los inversores son neutrales al riesgo. En un mundo neutral al riesgo se mantienen dos resultados:

i) La rentabilidad esperada de todos los activos es el tipo de interés libre de riesgo

ii) El tipo de interés libre de riesgo es el tipo de descuento apropiado a aplicar a cualquier futuro flujo de caja

Conclusión: Los inversores no necesitan compensaciones por el riesgo.

Vender a corto

Es una estrategia de arbitraje o especulación. Vender a corto implica vender activos que no tengo.

i) Inversor (I) vende a corto 500 acciones: Su agente (A) toma prestadas 500 acciones y las vende en el mercado
ii) I mantiene la posición mientras pueda hacerlo (shortsqueezed)
iii) I liquida la posición comprando 500 acciones: A devuelve el préstamo
Conclusión: Si baja la acción, hay beneficios; si sube, perdidas.

El agente exige una garantía o depósito inicial a los clientes a corto.

Futuros

Los futuros son unos contratos a plazo negociados... Su origen es la necesidad de cubrir el mercado de materias primas ante riesgos (**cobertura**) Los productores y los comerciantes buscan precios seguros.

Contrato a Plazo	**Futuro**
Privado entre dos partes	Negociado (CME, NYFE, LIFFE)
No estandarizado	Estandarizado
Ajuste al final	Ajuste diario en el mércado

Los contratos de futuros fijan la cantidad; la calidad del subyacente; último día de negociación; y la entrega (lugar, periodo, avisos).

Si el activo es objeto de inversión para gran parte de los inversores (futuros para contratos sobre índices, divisas, oro y plata), el precio a plazo de un futuro y su valoración es igual que en contrato a plazo siempre el interés sea constante o una función conocida en el tiempo.

Coste de almacenamiento. Habitual en mercaderías. El valor del contrato se incrementa por dichos gastos:

$$K = F_0 = (S_0 + U_0)e^{rT}, \qquad F_0 = S_0 e^{(r+u)T},$$

donde U_0 es el valor actual del coste de almacenamiento, o si estos costes son una proporción u del producto.

- Arbitraje en productos de consumo $F \leq (S + U)e^{rT}$.

Tasa de conveniencia. El disponer de la mercancía presenta ventajas a quien la mantiene y produce un descuento en el precio de entrega. Estos beneficios se llaman rendimientos de conveniencia y (concenience yield) y se define como

$$F_0 e^{yT} = (S_0 + U_0)e^{rT}, \qquad F_0 = S_0 e^{(r+u-y)T}.$$

El rendimiento de conveniencia refleja las expectativas del mercado concernientes a la disponibilidad futura del producto.

Coste de mantenimiento. Permite resumir las relaciones. Mide el coste de almacenamiento más el interés ue se paga para financiar el activo y menos el ingreso generado por el mismo. Definido como c

$$F = Se^{cT} \text{ activo de inversión}, \qquad F = Se^{(c-y)T} \text{ de consumo},$$

donde y es la tasa de conveniencia.

Operando con futuros Se han contrado 2 futuros de oro en CME. Características:

- Cada futuro son 100 onzas
- Cotización: la onza de oro en $
- Límites: bajadas del 4%
- Depósito de garantías, 5% dolares
- Saldo de mantenimiento a 80%

Fecha	Precio onza$	balance F $	saldos $	Δ diaria	Δ F
	1.200	12.000	-12.000		
20/03/17	1.201	12.200		200	200
21/03/17	1.194	10.800		-1.400	-1.200
22/03/17	1.192	10.400		-400	-1.600
23/03/17	1.186	9.200		-1.200	-2.800
24/03/17	1.188	12.400	-2.800	400	-2.400
27/03/17	1.187	12.200		-200	-2.600
28/03/17	1.189	12.600		400	-2.200
29/03/17	1.194	13.600		1000	-1.200
30/03/17	1.193	11.800	1.600	-200	-1.400
31/03/17	1.195	0	12.200	400	-1.000

Operando con futuros Se han comprado 4 futuros de cobre en CME. Características:

- Cada futuro son 25.000 libras
- Cotización: una libra en $
- Fin de cotización: 31/03/2017
- Límites: bajadas del 4%
- Depósito de garantías, 5% dólares
- Saldo de mantenimiento mínimo del 5%

Fecha	Libra$	Δ	bal. C $	sal. C $	bal. V $	mov. V $
	2,5000		12.500	-12.500	12.500	-12.500
20/03	2,4750	-2.500	12.500	-2.500	15.000	
21/03	2,4695	-550	12.500	-550	15.550	
22/03	2,4570	-1.250	12.500	-1.250	12.500	4.300
23/03	2,4535	-350	12.500	-350	12.850	
24/03	2,4395	-1.400	12.500	-1.400	14.250	
27/03	2,4870	4.750	17.250		12.500	-3.000
28/03	2,5015	1.450	18.700		12.500	-1.450
29/03	2,5395	3.800	22.500		12.500	-3.800
30/03	2,5190	-2.050	20.450		14.550	
31/03	2,5195	50	20.500		14.500	

Vendedor: Entrega 100.000 libras. Recibe 251.950$. Retira 14.500$ del depósito. **Comprador**: Paga 231.450 $ y le retiran depósito. Recibe 100.000 libras de cobre

Futuros sobre bonos del Tesoro, CBOT.

Es el contrato de futuros sobre tipos de interés a largo plazo más popular. Puede ser entregado

- Bono del estado con más de 10 años para su vencimiento
- Sin amortización anticipada antes de 10 años
- Hay futuros para otros vencimientos: 2 años; 5 años.

Los precios de los bonos se cotizan en dólares. La variación mínima es de un sesentaycuatroavos de dólar. Cada punto de la cotización son 1.000 $. El precio de la cotización de un bono o obligación no es igual al precio en metálico que paga el comprador:

$$\text{P. bono en metálico} = \text{P. cotización B} + \text{Interés devengado}$$

Para la posición corta se ha de determinar:
- Factor de conversión (fc) para definir el precio
- El bono a entregar: el más "barato"

$$\text{A recibir p.c.} = \text{ Cotización F } \times fc + \text{ Interés acumulado}$$

El factor de conversión para un bono es:
- a un TIR anual, compuesto semestral (o equivalente)
- el vencimiento y pagos de cupón en trimestres por defecto
- $fc =$ precio de 1$ de bono al primer día del mes de entrega

El bono más barato: Aquel que de más beneficio (o menor pérdida) al vendedor, es decir, aquel que haga mayor

$$\text{A recibir p.corta } - \text{ P. bono en metálico}$$

Determinar el precio de cotización de un futuro

1. Determinar que una obligación aceptada sea la más barata.
2. Calcular el factor de conversión fc de la obligación.
3. Calcular el precio en efectivo de dicho bono S
4. Calcular el precio del futuro $F = (S - I)e^{rT}$, donde I es el valor actual de los cupones a pagar antes de la entrega.
5. Calcular la cotización del futuro a partir de la tesoreria de la posición corta

$$\text{Cotización F } = \frac{F - \text{ Interés acumulado}}{fc}$$

Coberturas (hedge) con futuros. Objetivo: reducir riesgos.

cobertura corta	**cobertura larga**
Tiene un producto o sabe que lo va a tener	Va a necesitar un producto
Compensar una posición larga	Compensar una corta
	Pueden utilizarse opciones

Problemas que surgen: activos no tienen porque ser los mismos; no conocer la fecha; previa liquidación del futuro. Consecuencia, riesgo de base.

$$\text{base} = \begin{array}{c}\text{Precio de contado del}\\ \text{activo cubierto}\end{array} - \begin{array}{c}\text{Precio del futuro}\\ \text{utilizado}\end{array}$$

Ratio de cobertura. Es el cociente entre el tamaño de la posición tomada en contratos de futuros sobre el tamaño del activo expuesto.

Denotamos:

ΔS: Cambio en el precio de contado, S, durante una cobertura

ΔF: Cambio en el precio del futuro F, durante una cobertura

σ_S: Desviación estándar de ΔS

σ_F: Desviación estándar de ΔF

ρ: Coeficiente de correlación entre ΔS y ΔF

El ratio de cobertura de varianza mínima h^*

$$\mathrm{var}(\Delta S - h^* \Delta F) = \min\{\mathrm{var}(\Delta S - h\Delta F);\ h \in \mathbb{R}_+\},$$

minimiza el riesgo de la cartera resultante de la cobertura,

$$h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}.$$

Determinamos el número óptimo de contratos de futuros para cubrir un activo A. Denotamos:

N_A: número de unidades de A que esperamos vender en tiempo T

N_F: número de unidades de A que contratamos como futuro a T

Q_F: tamaño en unidades del contrato de futuro F

Entonces, del ratio de cobertura

$$h^* = \frac{N_F}{N_A}$$

y el número óptimo de contratos de futuros N^* es

$$N^* = \frac{N_F}{Q_F} = h^* \frac{N_A}{Q_F}$$

Futuros sobre índices bursátiles

Hacer coberturas sobre una cartera de acciones que pertenecen a dicho índice (IBEX35, Dow 30, S& P 500, Nasdaq, Euro Stoxx 50, DAX, FTSE100). Precio de entrega viene dado

$$F = Se^{(r-q)T}$$

donde r es el tipo libre de riesgo y q es la tasa continua de rendimientos por dividendos. También se puede obtener a partir de la cantidad de dividendos D.

$$F = (S - D)e^{rT}$$

Sea P, el precio de una cartera de acciones que vamos a cubrir

M, el valor del índice del mercado

A, el valor actual de las acciones subyacentes al índice

N^* el número de futuros de índice de mercado

Entonces $N^* = \beta P/A$, donde el parámetro β

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}(P, M)}{\sigma_M^2},$$

nos da la relación entre la rentabilidad de una cartera de acciones P y la rentabilidad del mercado según el modelo de variación de activos financieros, CAPM.

Coberturas y duración

Sea F, precio del contrato de futuros

D_F, duración del subyacente al futuro

P, precio actual de la cartera

D_P duración de la cartera al vencimiento de la cobertura

El número de contratos de futuros para cubrirse frente a un movimiento paralelo de la curva de interés

$$N^* = \frac{P D_P}{F D_F}$$